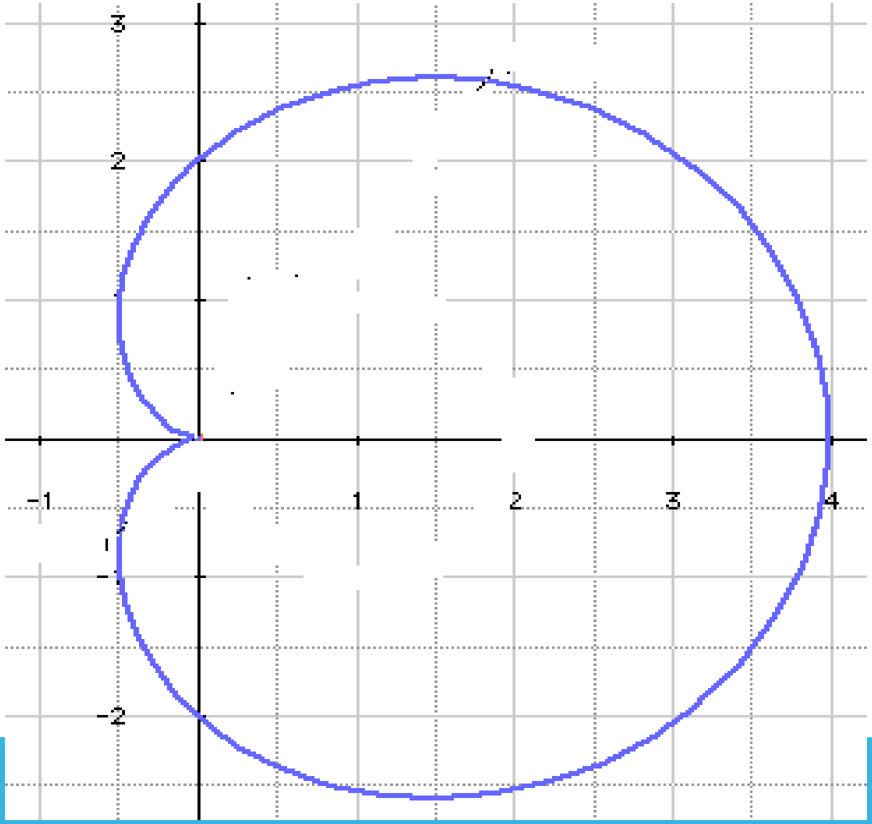
4.2- En coordonnées polaires :

4.2.1- Exemple :

Calculons l'aire de l'intérieur d'une cardioïde définie par :

$$C = \left\{ \begin{matrix} (r,\theta)\epsilon\mathbb{R}^2: & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ et \quad 0 \leq r \leq a(1 + cos\theta) & \end{matrix} \right\}$$


3
2
-2
-1
1
2
3
4

On a :

$$\mu(C) = \iint_C rdrd\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{a(1+cos\theta)} rdr \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \pi a^2$$

5- Intégrales triples :

Dans cette section, nous généralisons les résultats précédents au cas des fonctions de trois variables.

5.1- Intégrale triple d'une fonction continue sur un pavé:

On appelle pavé, toute partie de $\mathbb{R}^3$ *de la forme :*

$$\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

De même que l’intégrale double, l’intégrale triple a les propriétés de linéarité, croissance et de l’additivité par rapport au domaine.

Grâce au théorème de Fubini, le calcul d'une intégrale triple peut se ramener à trois calculs d'intégrales simples.

Si φ est une fonction continue sur P, on a :

$$\iiint_{\mathrm{P}} \varphi(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f \varphi(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Exemple :

Calculons :

$$I = \iiint_{[0,1]^3} z\, cos(x + y)\, dx\, dy\, dz$$

5.2- Extension à une partie bornée de $\mathbb{R}^3$:

De même, on définit les fonctions intégrables sur une partie bornée A de $\mathbb{R}^3$.

Une partie A est dite mesurable, si la fonction caractéristique χ_A est intégrable sur A.

On appelle mesure ou volume de A, le réel :

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz$$

Exemple :

Calculons le volume du tétraèdre A de sommets :

$$O, \qquad P(a,0,0),$$
$$Q(0,a,0) \quad et \quad R(0,0,a)$$

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a - x - y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a \left((a-x)^2 - \frac{(a-x)^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[(a - x)^3\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{6}$$

5.3- Changement de variables :